LUCRAREA 7

PROGRAMAREA NELINIARĂ CU RESTRICȚII

7.1. Aspecte generale privind programarea neliniară cu restricții

Marea majoritate a problemelor practice conţin limitări privind domeniul admis pentru vectorul variabilelor de optimizare $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ şi prin aceasta, soluţia optimă trebuie să fie aleasă în mod obligatoriu din domeniul respectiv.

Deci, în general, problema care trebuie rezolvată se referă la determinarea valorii variabilelor care asigură extremul unei funcţii obiectiv:

$$\textbf{FO:}\quad \min F(X) = \min F(x_1,\ x_2,\ ...,x_n) \tag{7.1}$$

în prezenţa restricţiilor,

$$\textbf{RE:}\quad g_i(x_1, x_2,\ ..., x_n) \le 0,\quad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ldots,n \tag{7.2}$$

Condiţiile care trebuie să fie satisfăcute pentru un optim cu restricţii, local sau global au fost stabilite de Kuhn şi Tucker plecând de la modelele clasice ale multiplicatorilor lui Lagrange.

Dacă $F(X)$ şi $g_i(X)$ au derivate parţiale de ordinul întâi, în raport cu x_j, $j = 1, \ldots,n$, considerând în relaţia (7.2) doar restricţiile de egalitate, funcţia Lagrange asociată problemei (7.1) - (7.2) are următoarea formă:

$$\phi(x,\lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X) \tag{7.3}$$

unde λ_i, $i = 1, ..., m$, sunt multiplicatorii Lagrange.

Un punct extrem al funcţiei $\Phi(X, \lambda)$, care poate fi punctul de minim, se poate obţine prin anularea derivatelor de ordinul 1, adică:

$$\frac{\partial\Phi(X,\lambda)}{\partial x_j}=\frac{\partial F(X)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}=0,\quad j=1,\ldots,n \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial\Phi(X,\lambda)}{\partial\lambda_i}=g_i(X)=0,\qquad i=1,\ldots,m \tag{7.5}$$

Relaţia (7.4) indică faptul că în punctul de minim gradientul funcţiei obiectiv este o combinaţie liniară a gradientuţilor restricţiilor. Relaţiile (7.4) şi (7.5) reprezintă condiţiile necesare dar nu şi suficiente pentru minim. Suficienţa este asigurată numai dacă funcţia obiectiv $F(X)$ este convexă, iar restricţiile sunt liniare. În concluzie, minimul funcţiei $F(X)$, în prezenţa restricţiilor de egalitate $g_i(X) = 0$, este obţinut pentru acele valori ale lui X care minimizează fără restricţii funcţia auxiliară $\Phi(X, \lambda)$.

Pentru folosirea acestei metode se aleg iniţial valori pentru λ_i, $i = 1, ..., m$, şi cu acestea se rezolvă sistemul (7.4) de n ecuaţii cu n necunoscute, $x_j, j = 1, \ldots,n$. Soluţiile găsite şi care depind de valorile lui λ_i sunt introduse în cele m restricţii. Dacă acestea nu sunt satisfăcute, se aleg alte valori pentru λ_i, $i = 1, ..., m$, până când cele $(n+m)$ ecuaţii vor fi satisfăcute de valorile alese.

Conceptul multiplicatorilor lui Lagrange a fost extins şi la cazul restricţiilor de inegalitate. Astfel, condiţiile Kuhn-Tucker obţinute în această situaţie sunt:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}=0,\ \ j=1,\ldots,n \tag{7.6}$$

$$g_i(X)\le 0,\qquad i=1,\ldots,m \tag{7.7}$$

$$\lambda_i g_i(X)=0,\quad i=1,\ldots,m \tag{7.8}$$

$$\lambda_i\ge 0,\ \ i=1,\ldots,m \tag{7.9}$$

Trebuie făcută menţiunea că, în situaţia în care $F(X)$ şi $g_i(X)$ sunt convexe, relaţiile (7.6)-(7.9) ne conduc la minimul global.

Semnul multiplicatorilor λ_i, $i = 1, ..., m$, se schimbă în funcţie de natura optimului căutat şi de semnul restricţiilor.

Condiţiile Kuhn-Tucker ne indică faptul că pentru o restricţie care nu este activă, de exemplu,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i,$$

multiplicatorul $\lambda_i = 0$.

7.2. Rezolvarea problemelor de programare neliniară cu restricţii cu funcţii MatLab

În general, o problemă de determinare a minimului unei funcţii neliniare în prezenţa unor restricţii de egalitate sau inegalitate poate avea următoarea formă:

$$\min_{X} F(X) \tag{7.3}$$

în prezenţa restricţiilor:

$$\begin{aligned} g(X) &= A \cdot X \le b \\ h(X) &= A_{eg} \cdot X = b_{eg} \\ X_{\min} &\le X \le X_{\max} \end{aligned} \tag{7.4}$$

unde:

$X, b, b_{eg}, X_{min}, X_{max}$ – vectori;

$g(X)$ şi $h(X)$ – funcţii ce returnează vectori;

A, A_{eg} – matrice;

$F(X)$ – funcţie ce returnează un scalar.

Sintaxele pnetru apelarea funcției Matlab sunt următoarele:

X = **fmincon**(*@fun*, *X*0, *A*, *b*) (a)

X = **fmincon**(*@fun*, *X*0, *A*, *b*, A_{eg}, b_{eg}) (b)

X = **fmincon**(*@fun*, *X*0, *A*, *b*, A_{eg}, b_{eg}, X_{min}, X_{max}) (c)

X = **fmincon**(*@fun*, *X*0, *A*, *b*, A_{eg}, b_{eg}, X_{min}, X_{max}, *@restrictii*) (d)

X = **fmincon**(*@fun*, *X0*, *A*, *b*, A_{eg}, b_{eg}, X_{min}, X_{max}, *@restrictii*, *options*) (e)

[*X*, *val_functie*, *convergenta*, *informatii*] = **fmincon**(...) (f)

unde:

(a) procesul are ca punct de plecare punctul $X0$ şi găseşte minimul funcţiei descrisă în fişierul fun, în prezenţa restricţiilor de inegalitate $A \cdot X \leq b$. $X0$ poate fi un vector, un scalar sau o matrice;

(b) minimizează funcţia descrisă în fişierul fun în prezenţa restricţiilor de egalitate şi inegalitate $A_{eg} \cdot X = b_{eg}$, $A \cdot X \leq b$. Dacă restricţiile de inegalitate nu există atunci A=[ ] şi b=[ ];

(c) defineşte o mulţime de limite/graniţe inferioare şi superioare, corespunzătoare variabilelor de optimizat X, astfel încît soluţia se găseşte întotdeauna în intervalul $[X_{min}, X_{max}]$. Dacă restricţiile de egalitate nu există atunci A_{eg}= [ ] şi b_{eg}= [ ];

(d) minimizează funcţia descrisă în fişierul fun, în prezenţa restricţiilor de egalitate $h(X)$ sau inegalitate $g(X)$, descrise în fişierul **restrictii**. Dacă X_{min}, respectiv X_{max} nu există atunci: X_{min} = [ ] şi/sau X_{max} = [ ];

(e) minimizează funcţia descrisă în fişierul fun, în prezenţa restricţiilor de egalitate $h(X)$ sau inegalitate $g(X)$, descrise în fişierul *restrictii*, cu parametrii de optimizare precizaţi în structura *options*;

(f) X – soluţia problemei;

val_funcţie – returnează valorile funcţiilor obiectiv corespunzătoare soluţiei găsite;

convergenta – furnizează informaţii cu privire la convergenţa procesului. Dacă *convergenta* = 1, funcţia converge la soluţia X, dacă *convergenta* = 0, numărul maxim de evaluări a funcţiei sau numărul maxim de iteraţii a fost depăşit, iar dacă *convergenta* = -1 procesul de optimizare este divergent;

informatii – oferă informaţii despre procesul de optimizare (numărul de iteraţii, numărul de evaluări ale funcţiei, algoritmul folosit).

Parametrii de intrare şi ieşire sunt următorii:

fun – fişier funcţie ce conţine expresiile funcţiilor obiectiv. Acest fişier are ca variabilă de intrare X, iar ca variabilă de ieşire un scalar F, a cărui valoare reprezintă funcţia obiectiv evaluată în punctul X. Fişierul *fun* poate fi apelat astfel:

function F = **fun**(X)

restrictii – fişier funcţie, în care se introduc atât restricţiile neliniare de inegalitate, cât şi cele de egalitate $g(X) \le 0$, $h(X) = 0$. Fişierul are ca variabilă de intrare un vector X, iar ca variabile de ieşire, doi vectori g şi h. Fişierul poate fi apelat astfel:

function $[g, h]$ = **restricţii**(X).

7.3. Exemplu numeric

Să se determine valoarea minimă pentru următoarea problemă:

FO: $\min(B) = 0{,}24P_1 + 0{,}0008P_1^2 + 0{,}16P_2 + 0{,}001P_2^2 + 0{,}18P_3 + 0{,}001P_3^2$

RE:
$$
\begin{aligned}
& P_1 + P_2 + P_3 = 625 \\
& 50 - P_1 \le 0\,;\; P_1 - 195 \le 0\,; \\
& 70 - P_2 \le 0\,;\; P_2 - 300 \le 0\,; \\
& 60 - P_3 \le 0\,;\; P_3 - 250 \le 0\,; \\
& P_1\,, P_2\,, P_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Se transformă problema de programare neliniară cu restricţii într-o problemă de programare neliniară fără restricţii, construind funcţia Lagrange:

$$
\begin{aligned}
\Phi = {} & 0{,}24P_1 + 0{,}0008\,P_1^2 + 0{,}16P_2 + 0{,}001\,P_2^2 + 0{,}18P_3 + 0{,}001\,P_3^2 + \\
& + \lambda\left[625 - \left(P_1 + P\ + P_3\right)\right] + \lambda_1\left(P_1 - 195\right)
\end{aligned}
$$

şi se foloseşte metoda gradientului cu pas constant.

Se alege un punct iniţial de plecare: $P_1 = 190$; $P_2 = 250$; $P_3 = 185$, iar pentru multiplicatorii Lagrange valorile: $\lambda = 0{,}6$ şi $\lambda_1 = 0{,}049$. Deasemeni, se alege pasul de deplasare: 500.

Iteraţia 1

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P_1} = 0{,}24 + 0{,}0016\cdot 190 - 0{,}6 + 0{,}049 = -0{,}007$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P_2} = 0{,}16 + 0{,}002\cdot 250 - 0{,}6 = 0{,}060$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P_3} = 0{,}18 + 0{,}002\cdot 185 - 0{,}6 = -0{,}05$$

$$P_1^{(1)} = 190 - 500 \cdot (-0{,}007) = 193{,}5$$
$$P_2^{(1)} = 250 - 500 \cdot (0{,}06) = 220{,}0$$
$$P_3^{(1)} = 185 - 500 \cdot (-0{,}05) = 210{,}0$$

Se verifică restricțiile și se observă că acestea nu sunt satisfăcute.

Iterația 2

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_1} = 0{,}24 + 0{,}0016 \cdot 193{,}5 - 0{,}6 + 0{,}049 = -0{,}002$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_2} = 0{,}16 + 0{,}002 \cdot 220 - 0{,}6 = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_3} = 0{,}18 + 0{,}002 \cdot 210 - 0{,}6 = 0$$

$$P_1^{(2)} = 193{,}5 - 500 \cdot (-0{,}002) = 194{,}5$$
$$P_2^{(2)} = 220 - 500 \cdot 0 = 220{,}0$$
$$P_3^{(2)} = 210 - 500 \cdot 0 = 210{,}0$$

Se verifică restricțiile și se observă că acestea nu sunt satisfăcute.

Iterația 3

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_1} = 0{,}24 + 0{,}0016 \cdot 194{,}5 - 0{,}6 + 0{,}049 = -0{,}001$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_2} = 0{,}16 + 0{,}002 \cdot 220 - 0{,}6 = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_3} = 0{,}18 + 0{,}002 \cdot 210 - 0{,}6 = 0$$

$$P_1^{(3)} = 194{,}5 - 500 \cdot (-0{,}002) = 195$$
$$P_2^{(3)} = 220 - 500 \cdot 0 = 220{,}0$$
$$P_3^{(3)} = 210 - 500 \cdot 0 = 210{,}0$$

Se verifică restricțiile și se observă că în această iterație acestea sunt satisfăcute.

7.4. Desfăşurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se va studia funcția Matlab prezentată în paragraful 7.2.
3. Pentru exemplul numeric prezentat în paragraful 7.3 se va folosi funcția Matlab **fmincon** pentru modelul matematic de optimizare inițial ce conține restricții.
4. Pentru exemplul numeric prezentat în paragraful 7.3 se va folosi funcția Matlab **fminunc** pentru modelul matematic de optimizare fără restricții.
5. Se vor compara rezultatele obținute la punctele 3 și 4 cu cele obținute folosind metoda gradientului cu pas constat folosită în paragraful 7.4.